TEORÍA DE CONJUNTOS

1. DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Conjunto es una colección de objetos que poseen características en común. Se denotan con letra mayúscula, por ejemplo: A,B,C,..., y los objetos pertenecientes a él se denominan elementos.

Los conjuntos se pueden representar por:

a) Extensión:

Es decir, enumerando todos sus elementos.

Ejemplo:
A = {a, e, i, o, u}

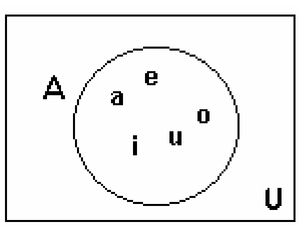
b) Comprensión:

Es decir, expresando una propiedad que tengan que cumplir todos los elementos del conjunto, y sólo ellos, propiedad que identifique a los elementos.

Ejemplo:
A={ x/x es vocal}

c) Diagrama:

Es decir, representando el conjunto con círculos dentro de un rectángulo, que generalmente es el universo.
Ejemplo:



Conjunto Vacío:

Es el conjunto que no tiene elementos y se denota por cualquiera de los símbolos:

- $\varnothing$
- { }

Conjunto Universo:

Es aquel conjunto que contiene a todos los elementos con los cuales se está trabajando en un momento determinado. Se denota por U.

Ejemplo:
A = {1, 2, 3}
B = {a, b, c}
U = {0,1, 2, 3,...,9, a, b, c,...,y, z}

Pertenencia:

Es la relación simbólica entre elemento y conjunto. El símbolo es $\in$, y se lee "pertenece a" o "está en". Es decir, $a \in A$ significa "a pertenece A" o "a es un elemento de A". Su negación "a no pertenece a A", se denota "$a \notin A$".

Ejemplo:
$2 \in$ IN
$-1 \notin$ IN

Nota: La relación de pertenencia se da sólo entre elemento y conjunto, nunca un conjunto pertenece a otro conjunto.

Subconjunto:

Decimos que el conjunto A es SUBCONJUNTO del conjunto B, si todos los elementos de A también pertenecen a B. Se denota por $A \subset B$ y se lee: "El conjunto A es subconjunto del conjunto B" o "A está incluido en B".

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Si A no es subconjunto de B, se denota $A \not\subset B$, y se cumple cuando hay un elemento en A que no está en B, es decir:

$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

Ejemplo:
A = {x/x vocal}
B = {y/y es letra}

Entonces $A \subset B$.

Observaciones:

1. $A \subset A$. Todo conjunto es subconjunto de si mismo.

2. $\phi \subset A$. El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

Conjuntos iguales:

Se dice, que A=B si $A \subset B \wedge B \subset A$. Entonces si $A \neq B$ y $A \not\subset B \vee B \not\subset A$. Es decir, si hay un elemento en un conjunto que no está en el otro.

Ejemplo:
A = {x/x es vocal}
B = {y/y es letra}

Se tiene $B \not\subset A$, luego $A \neq B$.

Ejemplo:
A = {x/x es vocal}
B = {a, e, i, o, u}
Se tiene A = B.

Cardinalidad:

Es el número de elementos de un conjunto.

Notación:
Cardinalidad de A= #A

Ejemplo:
A={a,e,i,o,u} ; #A=5

Conjunto Potencia:

El conjunto potencia de un conjunto A, es el conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto A. Se denota por P(A)

Ejemplo:

A = {a, b, c} ; P(A) = ?
El conjunto A tiene 8 subconjunto que son:

P(A) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {a, c}, {a, b, c}}

Observaciones:

1. Si #A= n, entonces $\#P(A)=2^n$
2. A, $\emptyset \in$ P(A)

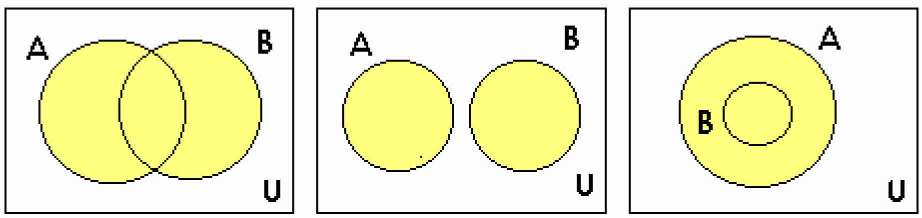
2. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

a) Unión:

La Unión de dos conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por todos los elementos que están en A o en B o en ambos.

Se denota: $A \cup B = \{x \;/\; x \in A \vee x \in B\}$

Gráficamente la unión está representada por:

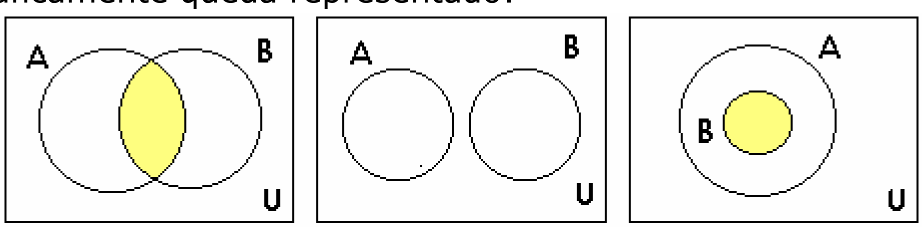


b) Intersección:

La intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que están en A y en B a la vez.

Se denota: $A \cap B = \{x \;/\; x \in A \wedge x \in B\}$

Gráficamente queda representado:



$A \cap B = \phi$ DISJUNTOS $\qquad A \cap B = B$

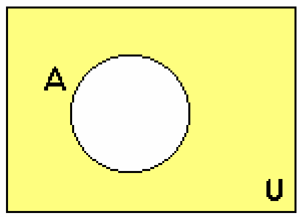
Nota: Se llama Conjuntos disjuntos, a aquellos conjuntos que no tienen elementos en común, es decir A y B son disjuntos si $A \cap B = \phi$ (figura central).

c) Complemento:

Sea U el conjunto universo y $A \subset U$, entonces el complemento del conjunto A es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al universo y no pertenecen a A.

Se denota: A^c ó A' se lee "complemento de A"
A^c ó $A' = \{x \in U / x \notin A\}$.

Gráficamente queda representado por:



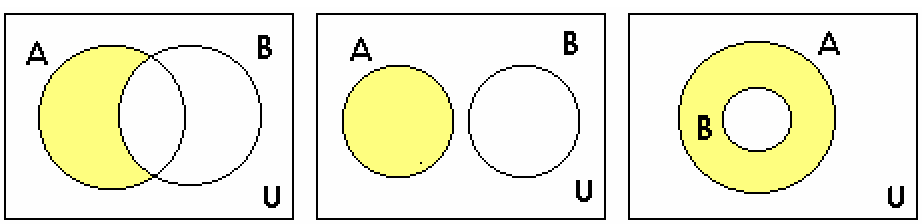
$A' = U - A$

d) Diferencia:

La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

Se denota: A - B y se lee "A menos B"
$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$.

Gráficamente queda representado:



3. PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

PROPIEDADES DE LA UNIÓN:

a) **Asociatividad:** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

b) **Conmutatividad:** $A\cup B=B\cup A$

c) $\forall$ A:$A\cup A=A$

d) $\forall$ A: $A\cup\phi=A$

e) $A\subset(A\cup B)$ y $B\subset(A\cup B)$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN:

a) **Asociatividad:** $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

b) **Conmutatividad:** $A\cap B = B\cap A$

c) $A\cap A =A$

d) $A\cap\phi=\phi$

e) $A\cap U =A$

f) $(A\cap B)\subset A$ y $(A\cap B)\subset B$

PROPIEDADES DEL COMPLEMENTO:

a) $A\cup A' = U$

b) $A\cap A' = \phi$

c) LEYES DE MORGAN:
$(A\cup B)' = A' \cap B'$ $(A\cap B)' = A' \cup B'$

d) $(A')'=A$

e) $\phi ' = U$

f) $U' = \phi$

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA:

a) $A-B=A\cap B'$

b) Si $A\cap B=\phi\Rightarrow A-B=A$ (figura central)

c) $(A-B)\subset A$

OTRAS PROPIEDADES:

a) $(C \cap D) \subset E \wedge (C \cap D) \subset B \Rightarrow (C \cap D) \subset (E\cap B)$

b) **Distributiva:**
$C \cap (D \cup E) = (C \cap D) \cup (C \cap E)$
$C \cup (D \cap E) = (C \cup D) \cap (C \cup E)$

PROPIEDADES DE LA CARDINALIDAD:

a) $\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$
b) $\#(A\cup B\cup C)=\#A+\#B+\#C-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C)$